

УДК 517.927.2

doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-1

О решении нелинейного интегрального уравнения Липпмана – Швингера методом сжимающих отображений

Ю. Г. Смирнов¹, Д. А. Лабуткина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru, ²labutkinadara@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается скалярная трехмерная краевая задача дифракции волны на неоднородном рассеивателе для уравнения Гельмгольца с нелинейной зависимостью волнового числа рассеивателя от поля. *Материалы и методы.* Исходная задача сводится к объемному нелинейному интегральному уравнению Липпмана – Швингера по рассеивателю. Для исследования интегрального уравнения применен метод сжимающих отображений. *Результаты.* Доказаны существование и единственность решения в пространстве непрерывных функций при некоторых ограничениях на параметры задачи. *Выводы.* Доказана сходимость итерационного процесса в методе сжимающих отображений и представлена оценка скорости сходимости.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, интегральные уравнения, метод сжимающих отображений, разрешимость краевой задачи, численный метод

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20087.

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Лабуткина Д. А. О решении нелинейного интегрального уравнения Липпмана – Швингера методом сжимающих отображений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 3–10. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-1

On the solution of the nonlinear Lippmann – Schwinger integral equation by the method of contracting maps

Yu.G. Smirnov¹, D.A. Labutkina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru, ²labutkinadara@gmail.com

Abstract. *Background.* A scalar three-dimensional boundary value problem of wave diffraction on an inhomogeneous scatterer for the Helmholtz equation with a nonlinear dependence of the scattering wavenumber on the field is considered. *Materials and methods.* The boundary value problem is reduced to the volume nonlinear Lippmann – Schwinger integral equation on the scatterer. The method of contracting maps is used to study the integral equation. *Results.* The existence and uniqueness of the solution in the space of continuous functions under certain conditions on the parameters of the problem are proved. *Con-*

clusions. The convergence of the iterative process in the method of contracting maps is proved and an estimate of the convergence rate is presented.

Keywords: Helmholtz equation, integral equations, method of contracting maps, solvability of boundary value problem, numerical method

Financing: the research was financed by the grant No. 20-11-20087 of the Russian Science Foundation.

For citation: Smirnov Yu.G., Labutkina D.A. On the solution of the nonlinear Lippmann – Schwinger integral equation by the method of contracting maps. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):3–10. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-1

Введение

Краевые задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца встречаются во многих разделах математической физики: акустике, механике, электродинамике. В частности, это задачи дифракции акустических или электромагнитных волн на рассеивателях. Основные типы этих задач исследованы достаточно подробно [1–4]. Однако в последнее время появился интерес к краевым задачам, в которых волновая функция нелинейно зависит от искомого решения. В качестве примера можно рассмотреть случай нелинейного метаматериала [5].

Одним из наиболее эффективных методов решения краевых задач сопряжения является метод интегральных уравнений. Краевая задача сопряжения сводится к объемному интегральному уравнению Липпмана – Швингера по области рассеивателя. Такой подход позволяет не только исследовать свойства и разрешимость задачи, но и получать ее численное решение. Вычислительные алгоритмы, построенные для решения интегральных уравнений, легко распараллеливаются, что позволяет использовать суперкомпьютеры для их решения.

В настоящей статье мы рассмотрим вопросы существования и единственности решения для краевой задачи дифракции и интегрального уравнения, а также докажем сходимость итерационной процедуры для метода сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций и получим оценку скорости сходимости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции на рассеивателе (в области) Q с гладкой границей ∂Q класса C^2 , расположенном в однородном пространстве R^3 , характеризующемся постоянным волновым числом k_0 .

Пусть $u_0(x)$ – падающая волна – известная функция, удовлетворяющая в R^3 однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0,$$

описывающая источник поля. Например, это может быть плоская волна

$$u_0(x) = e^{ik_0 x_3}, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3.$$

В области Q среда неоднородна и характеризуется волновой функцией $k(x; u)$. На ∂Q будем определять только предельные значения волновой функции и волнового числа с разных сторон поверхности. Требуется определить решение задачи сопряжения (полное поле), где искомая (комплексно-значная) функция $u(x)$ должна удовлетворять:

– условиям гладкости:

$$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q}) \cap C^1(\overline{R^3 \setminus Q}); \quad (1)$$

– уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2(x; u)u = 0, \quad (2)$$

где

$$k^2(x; u) = \begin{cases} k_0^2, & x \in R^3 \setminus \bar{Q}, \\ k^2(x) + \alpha|u|^2, & x \in Q; \end{cases} \quad (3)$$

– условию излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s = u - u_0$:

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_0 u_s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty; \quad (4)$$

– условиям сопряжения на границе ∂Q :

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (5)$$

где $[\cdot]_{\partial Q}$ – разность следов функции с разных сторон ∂Q .

Здесь n обозначает внешнюю нормаль к области Q ; функция $k^2(x; u)$ описывает вид нелинейной зависимости волновой функции в области Q ; непрерывная функция $k^2(x) > k_0^2$ определяет характер неоднородности рассеивателя; $\alpha > 0$ – коэффициент нелинейности – положительная постоянная, характеризующая уровень нелинейности поля. Зависимость вида (3) для волновой функции является аналогом закона Керра [6].

2. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Перепишем уравнения (2), (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k_0^2 u(x) &= 0, \quad x \in R^3 \setminus \bar{Q}, \\ \Delta u(x) + k_0^2 u(x) &= (k_0^2 - k^2(x; u))u(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$G = G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям $u(y)$ и $G(x, y)$ в R^3 , с учетом условий излучения (4), аналогично [7, с. 55], получаем интегральное уравнение в Q :

$$u(x) = \int_Q G(x, y) \left(k^2(y; u) - k_0^2 \right) u(y) dy + u_0(x), \quad x \in Q, \quad (7)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$. Полученное уравнение естественно называть нелинейным уравнением Липпмана – Швингера. Заметим, что если коэффициент нелинейности $\alpha = 0$, то (7) совпадает с известным (линейным) уравнением Липпмана – Швингера [7, 8].

Учитывая свойства объемного потенциала [9, с. 395], будем искать решения уравнения (7) в пространстве непрерывных функций $C(\bar{Q})$. Запишем уравнение (7) в операторном виде:

$$u = A(u), \quad (8)$$

где оператор $A(u): C(\bar{Q}) \rightarrow C(\bar{Q})$ определяется формулой

$$A(u)(x) := \int_Q G(x, y) \left(k^2(y; u) - k_0^2 \right) u(y) dy + u_0(x).$$

Введем также линейный оператор $A_0 u: C(\bar{Q}) \rightarrow C(\bar{Q})$ по формуле

$$A_0 u(x) = \int_Q G(x, y) u(y) dy.$$

Тот факт, что эти операторы непрерывны в пространстве $C(\bar{Q})$, является следствием вида волновой функции (3) и свойств объемного потенциала [9, с. 395].

3. Существование и единственность решения интегрального уравнения

Пусть $R > 0$ – фиксированное число такое, что $\|u_0\|_C < R$. Будем рассматривать уравнение (8) в шаре радиуса R : $u \in C_R(\bar{Q}) := \{u \in C(\bar{Q}) : \|u\|_C \leq R\}$. Введем обозначение $K := \max_{x \in Q} |k^2(x) - k_0^2|$, $K > 0$.

Пусть также $M := \|A_0\|_{C(\bar{Q}) \rightarrow C(\bar{Q})}$. Тогда справедлива

Лемма 1. Если выполняется условие

$$M(KR + \alpha R^3) + \|u_0\|_C \leq R, \quad (9)$$

то (нелинейный) оператор A действует в шаре $C_R(\bar{Q})$: $A(\cdot): C_R(\bar{Q}) \rightarrow C_R(\bar{Q})$.

Доказательство. Достаточно проверить следующую цепочку неравенств при условии, что $\|u\|_C \leq R$:

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_C &\leq M\|(k^2(x;u) - k_0^2)u\|_C + \|u_0\|_C \leq \\ &\leq M(K\|u\|_C + \alpha\|u\|_C^3) + \|u_0\|_C \leq M(KR + \alpha R^3) + \|u_0\|_C \leq R.\end{aligned}$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$M(K + 3\alpha R^2) < 1, \quad (10)$$

то оператор $A(\cdot): C_R(\bar{Q}) \rightarrow C_R(\bar{Q})$ сжимающий.

Доказательство. Пусть $u_1 \in C_R(\bar{Q})$, $u_2 \in C_R(\bar{Q})$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}A(u_1) - A(u_2) &= \int_Q G(x, y)(k^2(y; u_1) - k_0^2)u_1(y)dy - \\ &\quad - \int_Q G(x, y)(k^2(y; u_2) - k_0^2)u_2(y)dy = \\ &= \int_Q G(x, y)\left((k^2(y) - k_0^2)(u_1(y) - u_2(y)) + \alpha(u_1(y)|u_1(y)|^2 - u_2(y)|u_2(y)|^2)\right)dy\end{aligned}$$

и оценим ее по норме:

$$\begin{aligned}\|A(u_1) - A(u_2)\|_C &\leq M\left\|\left(k^2(y) - k_0^2\right)(u_1 - u_2) + \alpha\left(u_1|u_1|^2 - u_2|u_2|^2\right)\right\|_C \leq \\ &\leq M\left(K\|u_1 - u_2\|_C + \alpha\left\|\left(u_1|u_1|^2 - u_2|u_1|^2\right) + \left(u_2|u_1|^2 - u_2|u_2|^2\right)\right\|_C\right) \leq \\ &\leq M\left(K\|u_1 - u_2\|_C + \alpha R^2\|u_1 - u_2\|_C + \alpha\|u_2(|u_1| - |u_2|)(|u_1| + |u_2|)\|_C\right) \leq \\ &\leq M\left(K\|u_1 - u_2\|_C + \alpha R^2\|u_1 - u_2\|_C + 2\alpha R^2\|u_1 - u_2\|_C\right) \leq \\ &\leq M(K + 3\alpha R^2)\|u_1 - u_2\|_C,\end{aligned}$$

откуда следует, что при выполнении условия (10) оператор будет сжимающим. При оценке использовалось простое, справедливое для любых комплексных чисел z_1 и z_2 неравенство $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 - z_2|$, которое легко получить, записав эти числа в тригонометрической форме.

Из принципа сжимающих отображений [10, с. 351], леммы 1 и теоремы 1 следует, что решение уравнения (8) существует и единственно при выполнении условий (9), (10). Таким образом, верна

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9), (10). Тогда решение уравнения (8) существует и единственно в шаре $C_R(\bar{Q})$.

Оценки (9), (10) выполняются, в частности, при малых значениях коэффициента нелинейности α и, одновременно, при малых величинах K .

4. Сходимость итерационного метода

В качестве следствия из теоремы 1 и принципа сжимающих отображений [10, с. 351] получаем

Утверждение 1. При выполнении условий (9), (10) итерационный метод

$$u^{(n+1)} = A(u^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

сходится $\|u - u^{(n)}\|_C \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ при любом начальном приближении $u^{(0)}$ таким, что $\|u^{(0)}\|_C \leq R$, со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q < 1$, и верна оценка скорости сходимости

$$\|u - u^{(n)}\|_C \leq \frac{q^n}{1-q} \|A(u^{(0)}) - u^{(0)}\|_C,$$

где $q := M(K + 3\alpha R^2)$, а $u \in C_R(\bar{Q})$ – точное решение уравнения (8).

В качестве хорошего начального приближения можно взять решение линейного уравнения при $\alpha = 0$, которое подробно исследовано, численные методы для его решения разработаны [7].

5. Разрешимость краевой задачи

Пусть $u \in C_R(\bar{Q})$ – (точное) решение интегрального уравнения (7) (или (8)). Рассмотрим интегральное представление

$$u(x) = \int_Q G(x, y) (k^2(y; u) - k_0^2) u(y) dy + u_0(x), \quad x \in R^3 \setminus \bar{Q}. \quad (12)$$

Докажем, что функция $u \in C_R(\bar{Q})$, определенная в Q и продолженная в $R^3 \setminus \bar{Q}$ по формуле (12), является решением краевой задачи (1)–(5). В области $R^3 \setminus \bar{Q}$ функция $u \in C^\infty(R^3 \setminus \bar{Q})$ удовлетворяет уравнению (2) за счет выбора ядра $G(x, y)$, поскольку в (12) $x \notin Q$ и можно дифференцировать (12) под знаком интеграла. Условие излучения (4) также выполняется автоматически за счет выбора ядра $G(x, y)$.

В силу свойств объемного потенциала [9, с. 395] правая часть уравнения (7) есть непрерывно дифференцируемая функция в R^3 . Тогда левая часть уравнения (7) также непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$ и, по формуле (12), в $R^3 \setminus Q$ и условия сопряжения (4) выполняются. Поскольку теперь $u \in C^1(\bar{Q})$, то, снова применяя утверждение о гладкости объемного потенциала [9, с. 395], получаем, что $u \in C^2(Q)$, и условия гладкости (1) также выполняются.

Остается проверить справедливость уравнения (2) в области Q . Имеем

$$\Delta u(x) + k_0^2 u(x) = \int_Q (\Delta_x + k_0^2) G(x, y) (k^2(y; u) - k_0^2) u(y) dy + (\Delta_x + k_0^2) u_0(x) =$$

$$-\int_Q \delta(x - y) (k^2(y; u) - k_0^2) u(y) dy = -(k^2(x; u) - k_0^2) u(x),$$

откуда следует, что $\Delta u(x) + k^2(x; u(x))u(x) = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Решение $u(x)$ интегрального уравнения (7) (или (8)) вместе с интегральным представлением (12) дает единственное решение краевой задачи (1)–(5).

Заключение

В работе рассмотрена нелинейная краевая задача дифракции волны на неоднородном рассеивателе для уравнения Гельмгольца с нелинейной зависимостью волнового числа рассеивателя от интенсивности поля. С помощью объемного потенциала исходная задача сведена к исследованию нелинейного интегрального уравнения Липпмана – Швингера по области рассеивателя. Доказаны существование и единственность решения как интегрального уравнения, так и краевой задачи дифракции при некоторых ограничениях на параметры задачи. Для доказательства применен принцип сжимающих отображений.

Для численного решения интегрального уравнения предложен итерационный метод сжимающих отображений. Доказана сходимость метода при произвольном начальном приближении при некоторых ограничениях на параметры задачи. Получена оценка скорости сходимости.

Список литературы

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 540 с.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М. : Мир, 1984. 472 с.
3. Nedelec J-C. Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. Springer Science+Business Media, 2001. Vol. 144. 316 p.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
5. Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах / под ред. Ю. С. Кившаря, Н. Н. Розанова. М. : Физматлит, 2015. 384 с.
6. Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. М. : Физматлит, 2003. 304 с.
7. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М. : Русайнс, 2016. 226 с.
8. Colton D., Kress R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer Science+Business Media, 2013. 405 p.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1993. 440 с.

References

1. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki = Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1973:540. (In Russ.)

2. Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy = Inhomogeneous media and the theory of vibrations*. Moscow: Mir, 1984:472. (In Russ.)
3. Nedelec J-C. *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer Science+Business Media, 2001:144:316.
4. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya = Methods of integral equations in scattering theory*. Moscow: Mir, 1987:311. (In Russ.)
5. Kivshar Yu.S., Rozanova N.N. (eds.). *Nelineynosti v periodicheskikh strukturakh i metamaterialakh = Nonlinearities in periodic structures and metamaterials*. Moscow: Fizmatlit, 2015:384. (In Russ.)
6. Akhmediev N.N., Ankevich A. *Solitony, nelineynye impul'sy i puchki = Solitons, non-linear pulses and beams*. Moscow: Fizmatlit, 2003:304. (In Russ.)
7. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel = Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies*. Moscow: Rusayns, 2016:226. (In Russ.)
8. Colton D., Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer Science+Business Media, 2013:405.
9. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1981:512. (In Russ.)
10. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz = Functional analysis*. Moscow: Nauka, 1993:440. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Дарья Андреевна Лабуткина

аспирант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: labutkinadara@gmail.com

Dar'ya A. Labutkina

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 24.04.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.06.2023

Принята к публикации / Accepted 20.08.2023